La méthode (de simulation) de Monte Carlo

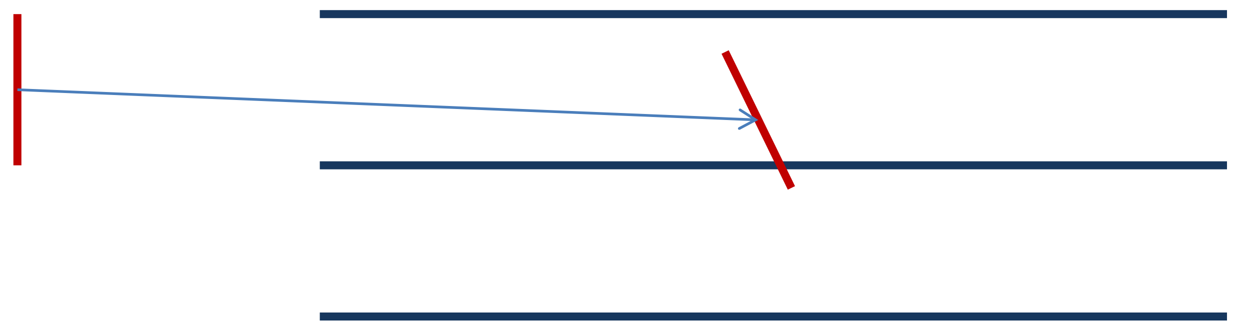
Un essai de définition

- Méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires

- Méthode de simulation d'un problème donné par un problème de nature probabiliste résolu en utilisant des techniques spécifiques au calcul des probabilités

Monte Carlo avant Monte Carlo

Calcul de pi par la méthode des aiguilles de Buffon (1733/~1860)



Pr (contact aiguille avec une ligne) = $2/\pi$

Monte Carlo avant Monte Carlo

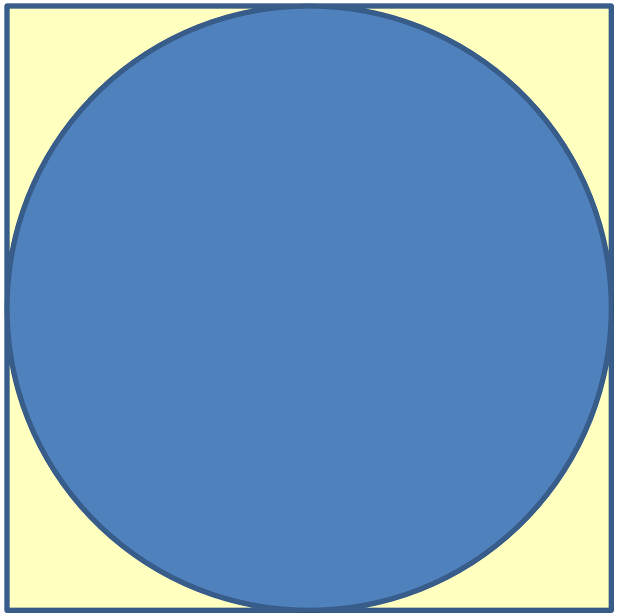
Calcul de pi par le calcul de la surface d'un cercle

Rapport

surface disque/surface carré

$= \pi/4$

Pr [point « tombe » dans le disque] $= \pi/4$



Monte Carlo avant Monte Carlo

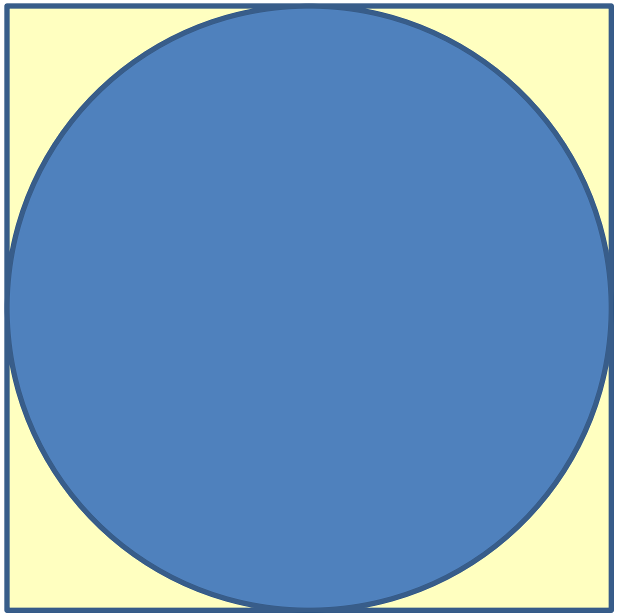
Performance de la méthode

n épreuves (n):

Nb fav./Nb t. # π/4

$$< N > = \frac{\pi}{4} \pm 2\sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{1-\frac{\pi}{4}}{\sqrt{n}}}$$

$$\sigma(\pi) \# 1.65/\sqrt{\mathrm{n}}$$



Monte Carlo avant Monte Carlo

Conclusion

Intellectuellement intéressant …

… mais sans application pratique ….

… Sauf si on peut « tirer des echantillons »

très rapidement.

La méthode de Monte Carlo

L'idée : utiliser la puissance des ordinateurs pour faire des tirages très rapides

Le contexte : l'effort de guerre

Les auteurs : John von Neumann, Stanislas Ulam, Nicholas Metropolis

Application : diffusion neutronique

La méthode de Monte Carlo

Le défi : utiliser un ordinateur pour simuler le tirage de nombres aléatoires

3,141592700	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0

6,674895731	0,9698037	0,4733386	0,1594857	0,0645506	0,4308685	0,8760021	0,8472229	0,6551242	0,3728857	0,4889731
	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0

6,974895731	0,9122815	0,089384	0,5966287	0,9824342	0,5576456	0,7222259	0,8207827	0,478639	0,1948652	0,3007052
	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0

6,984895731	0,9436974	0,299082	0,9963412	0,6504736	0,3418437	0,2817708	0,8807904	0,8791842	0,8684626	0,7968973
	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1

6,984891731	0,9436849	0,2989981	0,9957813	0,6467365	0,3168984	0,1152638	0,7693741	0,1354916	0,904392	0,0367226
	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0

6,984891856	0,9436853	0,2990007	0,9957988	0,6468532	0,3176779	0,1204672	0,8041058	0,3673224	0,451839	0,0159784
	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0

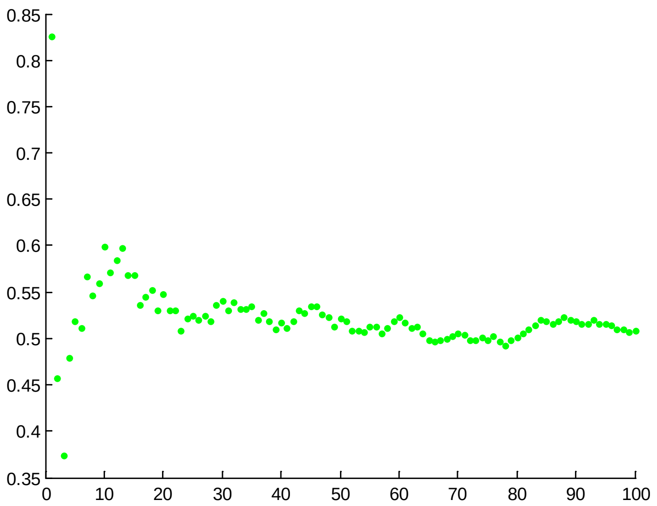
La méthode de Monte Carlo

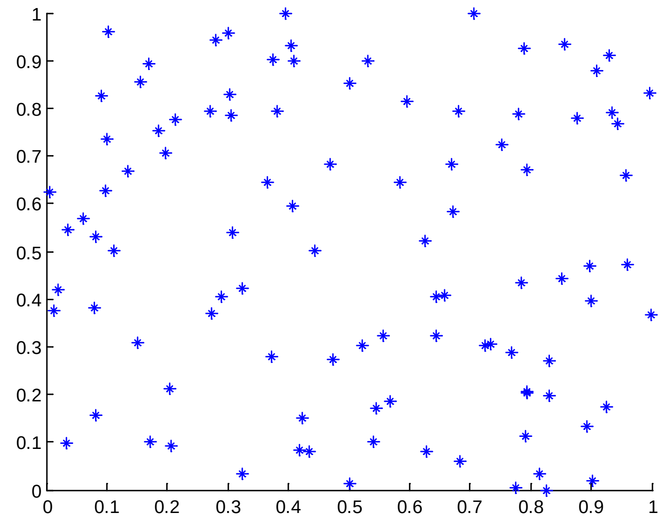
Les limites

- Rapidité de tirage
- Nombre de bits codant les nombres
- Période
- Uniformité
- Indépendance statistique
- Autre loi que la loi uniforme

La méthode de Monte Carlo

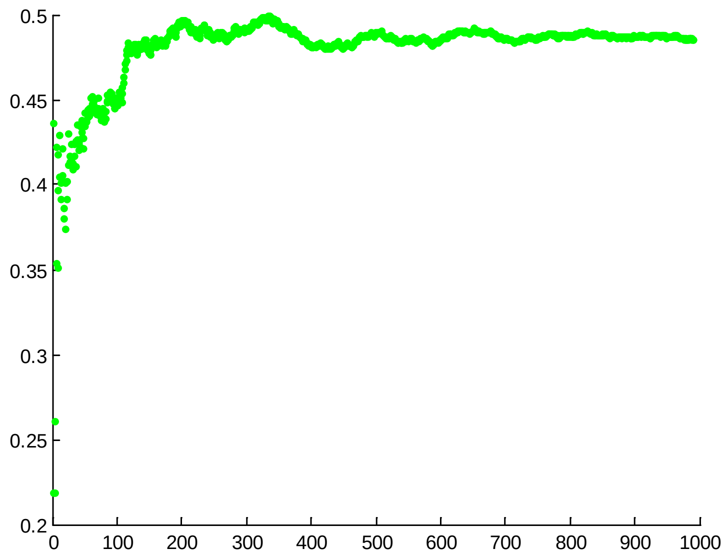
Les tests

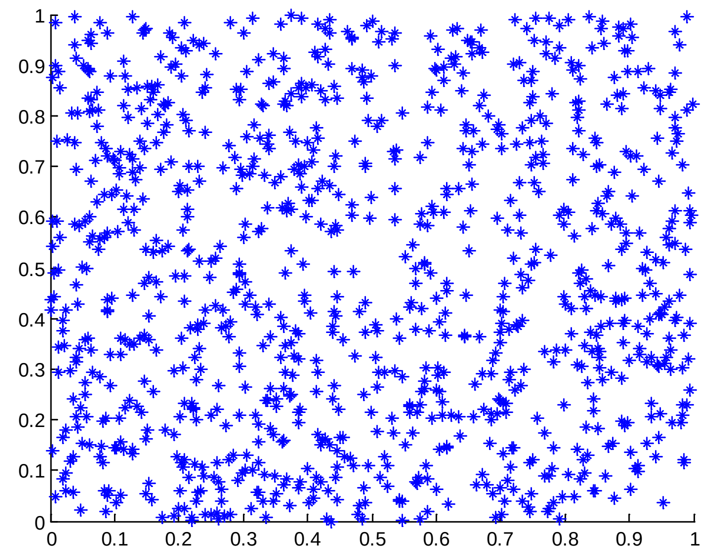




La méthode de Monte Carlo

Les tests





Attention ! Les tests à effectuer dépendent de la nature du problème

La méthode de Monte Carlo

Tirage d'échantillons

- U(0,1) → u_k fourni par progiciel
- exp (λ) → $x_k = \frac{-1}{\lambda} \ln(u_k)$
- G(0,1) → $x_{2p} = \sqrt{-2\ln(u_{2p})}\cos(2\pi u_{2p+1})$

  $x_{2p+1} = \sqrt{-2\ln(u_{2p})}\sin(2\pi u_{2p+1})$
- P(λ) → x_k *nécessite m échantillons* $u_{k,l}$ *(approché)*

La méthode de Monte Carlo

L'exemple classique : calcul d'intégrale

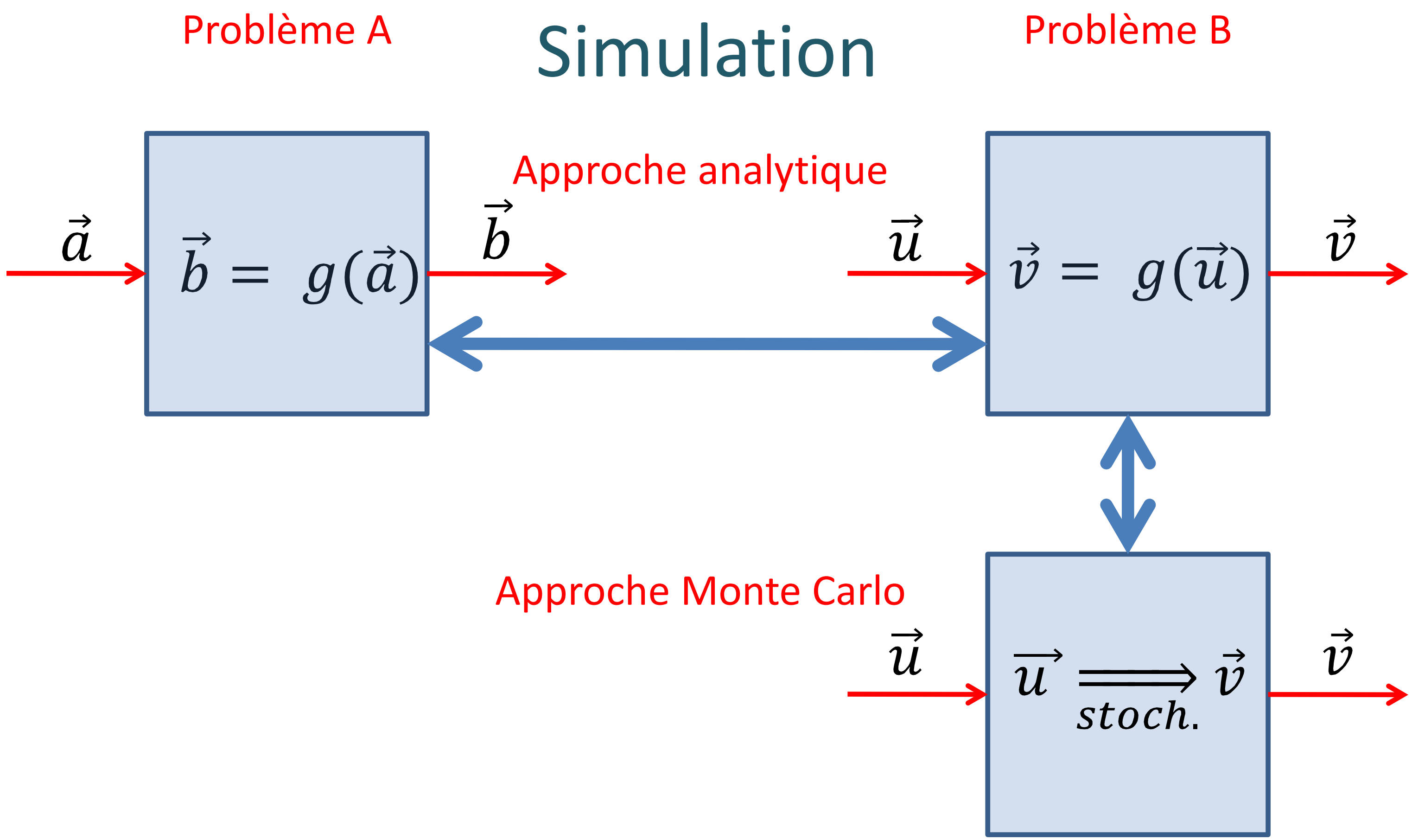
$$I = \iiint g(\vec{u})\, d\vec{u}$$

$$I = \iiint \frac{g(\vec{u})}{f(\vec{u})} f(\vec{u}) d\vec{u}$$

$$I = E[\vec{U}]$$

$$I \# \frac{1}{n} \sum \overrightarrow{u_k}$$

La méthode de simulation de Monte Carlo



La méthode de simulation de Monte Carlo

Exemple

Problème B